ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 23 OCTOBRE 1944.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES MAURAIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

Notice nécrologique sur EUGÈNE FABRY,
par M. **ÉMILE BOREL.**

EUGÈNE FABRY, né à Marseille le 16 octobre 1856, fit ses études secondaires au Lycée de Marseille et entra, avant 18 ans, à l'École polytechnique en 1874. Il en sortit comme élève ingénieur des Manufactures de l'État et, après deux ans d'école d'application, fut envoyé comme ingénieur dans une manufacture de tabac, d'abord à Châteauroux, puis à Marseille. La fabrication du tabac, la besogne administrative, la direction d'un nombreux personnel ouvrier ne l'intéressaient aucunement. Il avait été un brillant élève en mathématiques, et n'avait pas cessé de s'intéresser à la Science; très rapidement, l'idée lui vint qu'il vaudrait mieux pour lui changer de carrière, et s'orienter vers l'enseignement et la recherche scientifique. En 1882 il fut reçu au concours de l'agrégation de mathématiques, auquel il s'était préparé seul; il abandonna la fabrication du tabac, et devint professeur de Lycée, successivement à Tarbes, à Carcassonne et à Tours. En 1885 il obtint le grade de Docteur ès sciences mathématiques; la même année il fut nommé Maître de Conférences à la Faculté de Rennes, puis à celle de Nancy. En 1886 il fut nommé chargé de cours et bientôt après, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Montpellier. Un peu plus tard, il échangea cette chaire contre celle d'analyse à la même Faculté, où il enseigna pendant 34 ans, de 1886 à 1920. C'est là qu'il fit les plus importants de ses travaux mathématiques. En 1920, la chaire d'analyse de la Faculté des Sciences de Marseille étant devenue vacante, les liens de famille qui l'attiraient dans cette ville le conduisirent à demander son transfert de Montpellier à Marseille. Il fut mis à la retraite en 1926; il continua à habiter à Mazargues-Marseille et à s'intéresser aux mathématiques. En 1931 il fut élu Correspondant de l'Académie pour la Section de Géométrie.

Il est mort à Mazargues (Bouches-du-Rhône) le 6 octobre 1944, à l'âge de 88 ans, après une vieillesse sans infirmités et sans souffrances.

Le premier travail d'Eugène Fabry fut sa Thèse de Doctorat, *Les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels*. Il sut apporter à ce sujet difficile une contribution personnelle importante, en introduisant des séries plus générales que les intégrales régulières de Fuchs et les séries normales de Thomæ. Ces séries de Fabry, auxquelles Poincaré donna le nom de *séries anormales*, sont souvent divergentes, comme d'ailleurs les séries normales; mais, malgré cela, comme l'ont montré Eugène Fabry et Poincaré, elles peuvent être utilisées pour l'étude des intégrales irrégulières.

Eugène Fabry consacra ensuite ses recherches à un problème important et difficile, déjà abordé avant lui par de nombreux mathématiciens, notamment par notre éminent Confrère Jacques Hadamard. Il s'agit de chercher et d'étudier les points singuliers situés sur le cercle de convergence d'un développement de Taylor, qui définit une fonction analytique à l'intérieur du cercle. L'idée originale de Fabry fut de substituer à l'étude de la suite complète des coefficients de la série de Taylor, celle de suites partielles de coefficients extraites de cette suite complète. Dans des cas très généraux, on peut ainsi obtenir certains points singuliers et en étudier les propriétés.

Un cas particulier fort intéressant est celui où la fonction analytique que l'on étudie admet comme points singuliers tous les points d'un arc du cercle de convergence ou même tous les points de ce cercle. Weierstrass avait, le premier, donné des exemples, devenus classiques, de séries admettant ainsi le cercle de convergence comme coupure, c'est-à-dire définissant des fonctions analytiques ne pouvant être prolongées à l'extérieur de ce cercle. Ces séries de Weierstrass présentent cette particularité remarquable que les coefficients d'un très grand nombre des puissances de la variable z sont égaux à zéro; en d'autres termes, les coefficients non nuls sont très rares par rapport aux coefficients nuls. M. Hadamard et d'autres géomètres ont montré que les résultats de Weierstrass pouvaient être très largement généralisés, la valeur particulière des coefficients non nuls n'ayant pas d'importance, car le seul fait de la rareté suffisante de ces coefficients entraîne la conséquence que le cercle de convergence est une coupure.

Eugène Fabry reprit cette question et réussit à démontrer un théorème dépassant de beaucoup les résultats obtenus par ses prédécesseurs, et qui n'a pas lui-même été dépassé. Ce théorème fort remarquable peut s'énoncer ainsi; soient $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ les exposants des puissances de z dont le coefficient n'est pas nul; pour que la série admette le cercle de convergence comme coupure, il suffit que la différence $c_{n+1} - c_n$ augmente indéfiniment.

L'étude approfondie des séries entières conduisit Fabry à la conclusion suivante, déjà entrevue par d'autres géomètres, mais dont l'énoncé est assez vague pour qu'il soit nécessaire de le préciser : si l'on considère toutes les séries entières ayant un même rayon de convergence R, on doit regarder comme les plus générales celles dont le cercle de convergence est une coupure. En d'autres

termes, si l'on part de la série entière pour définir la fonction d'une variable complexe, le cas le plus général sera celui de la fonction n'existant qu'à l'intérieur de son cercle de convergence. La part prise par Eugène Fabry à l'éclaircissement de cet énoncé, d'autant plus intéressant qu'il apparaît au premier abord comme paradoxal, a été considérable et est sans doute la plus belle de ses découvertes scientifiques.

Nous ne pouvons entrer dans le détail de tous les résultats obtenus par Fabry sur des questions se rattachant aux précédentes : formation de séries n'admettant que des points singuliers déterminés, ou admettant comme coupures certains arcs du cercle de convergence, ou ne présentant aucun point singulier dans certaines régions extérieures à ce cercle, définition précise du degré d'infinitude attaché à un point du cercle de convergence, distinction parfois nécessaire entre le degré d'infinitude maximum sur le cercle et le degré d'infinitude à l'intérieur du cercle, généralisation de théorèmes de M. Lindelöf sur le genre des fonctions entières, étude de la variation simultanée des rayons de convergence associés d'une série de Taylor à deux variables.

Indépendamment de ses travaux d'analyse, Eugène Fabry a résolu le premier une question longtemps laissée sans réponse en faisant connaître des courbes réelles à torsion constante, algébriques et même unicursales.

Signalons enfin un important ouvrage d'enseignement, *Traité de mathématiques générales*, fort apprécié des étudiants, ainsi que des *Problèmes et exercices de mathématiques générales*.

L'œuvre mathématique d'Eugène Fabry se distingue par des qualités exceptionnelles de profondeur et de pénétration dans la découverte; à plusieurs reprises il a élucidé des difficultés qui avaient arrêté beaucoup de mathématiciens fort distingués; son nom restera longtemps attaché à la solution de questions importantes et difficiles.

L'Académie lui avait décerné en 1908 une partie du prix Houllevigue et en 1930 le prix Francœur; dès 1920, la Section de Géométrie l'avait inscrit sur sa liste de présentation pour une place de Correspondant; il fut élu le 19 janvier 1931 Correspondant de l'Académie, où il a retrouvé ses deux frères, Louis Fabry, élu le 3 mars 1919 Correspondant pour la Section d'Astronomie et décédé le 26 janvier 1939 et Charles Fabry, élu le 20 juin 1927 Membre de la Section de Physique générale. Les trois frères ont ainsi pu siéger tous trois parmi nous pendant plus de huit ans. C'est là un fait assurément fort rare et sans doute unique dans les Annales de l'Institut de France et des Académies [1].

---

(1) Ajoutons qu'Eugène Fabry eut la joie de voir son gendre Jean Cabannes, devenir également Correspondant de l'Académie; il fut élu le 20 juin 1932, sur la proposition de la Section de Physique générale et put ainsi siéger près de sept ans à côté des trois frères Fabry.

TOXICOLOGIE. — *L'intoxication par les Champignons : l'hypoglycémie amanitinique.* Note (1) de MM. **Léon Binet**, **René Fabre** et Mlle **Madeleine Marquis**.

L'observation des animaux intoxiqués par l'Amanite phalloïde (*Amanita phalloïdes* Fr.), soit après ingestion du Champignon, soit après injection sous-cutanée d'un extrait aqueux de ce dernier, a montré à l'un de nous, travaillant avec J. Marek, l'existence d'une hypoglycémie accentuée qui a fait ici-même l'objet d'une communication en 1936 (2). Celle-ci nous avait conduit à préconiser, pour combattre l'intoxication fongique, une thérapeutique sucrée qui possède à son actif d'indiscutables succès. C'était revenir à une méthode envisagée en France dès 1821 par Joseph Roques (3), qui avait conseillé de « donner dans ces cas une grande quantité d'eau miellée ou sucrée », méthode qui a retenu l'attention de divers auteurs étrangers (G. Blank, W. Steinbrinck).

Les travaux récents poursuivis par H. Wieland sur les toxines de l'Amanite phalloïde nous ont amenés à reprendre l'étude physiologique de l'*amanitine* sur le taux du glucose sanguin.

Pour extraire l'amanitine de l'Amanite phalloïde, nous avons utilisé la technique de F. Lynen, H. Wieland et R. Haller-Mayer (4), en partant d'une récolte de $3^{kg},250$ de champignons recueillis par H. Hédou.

Les Champignons frais ont été desséchés et le résidu sec a été extrait à l'alcool méthylique. Après élimination du solvant sous pression réduite, le résidu a été repris par l'eau, puis traité par l'acétate basique de plomb. L'excès de plomb a été éliminé par l'acide sulfurique dilué, puis le liquide a été soumis à l'action du sulfate d'ammonium. On a obtenu ainsi un précipité qui a été extrait par l'alcool butylique normal. Par chromatographie sur alumine, élution à l'alcool méthylique et cristallisation dans l'alcool butylique, on a obtenu l'amanitine de point de fusion 245°. Nous avons ainsi pu préparer $0^{g},18$ de ce corps.

H. Wieland et R. Haller-Mayer, expérimentant sur la Souris, admettent que 5^{γ} d'amanitine tuent une souris de 20^{g} en 2 jours. La dose toxique est donc de $0^{mg},25$ par kilogramme d'animal.

Nos essais personnels ont été effectués sur des chiens de petite taille (de 4 à $5^{kg},500$). L'amanitine tue cet animal à une dose qui a varié de $0^{mg},186$ à $0^{mg},194$ par kilogramme. A cette dose la mort a lieu entre la 20e et la 22e heure après l'injection, et l'examen du sang a montré à la 18e heure l'existence d'une hypoglycémie très accentuée : $0^{g},44$ ‰. L'étude histologique du foie de ces

---

(1) Séance 28 septembre 1944.

(2) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 1219; *C. R. Soc. Biol.*, **124**, 1937, p. 13.

(3) *Phytographie médicale*, 1, 1821, p. 59, Paris.

(4) *Liebig's Annalen*, **548**, 1941, p. 1.

animaux, pratiquée par Jean Verne, n'a pas permis d'y déceler de traces de glycogène.

Nous voudrions insister sur le fait qu'avec des doses plus faibles, de $0^{mg},06$ à $0^{mg},156$ par kilogramme, l'amanitine a été tolérée par l'animal qui a survécu, mais a réagi par une chute nette du glucose sanguin.

Les expériences faites dans ce sens sont résumées dans le tableau suivant :

	Doses d'amanitine injectées par kg d'animal			
	$0^{mg},06$.	$0^{mg},09$.	$0^{mg},119$.	$0^{mg},156$.
Glycémie avant	1,08	0,95	0,84	0,91
» 18 heures après injection	0,88	0,52	0,87	0,87
» 24 » »	0,94	0,58	0,54	0,60
» 42 » »	0,82	0,66	0,79	0,55
» 48 » »	1	0,66	0,84	0,76
» 66 » »	–	0,80	0,84	0,74
» 84 » »	–	0,82	–	–
» 5 jours »	–	–	–	0,79
» 6 » »	–	0,92	0,87	0,80

Un chien dépancréaté, ayant une glycémie de 2,88 $^0/_{00}$, a reçu une dose d'amanitine de $0^{mg},083$ par kilogramme. Sa glycémie est tombée 17 heures après l'injection à 2,44 $^0/_{00}$. Elle est remontée 24 heures après l'injection à $3^{mg},12$ $^0/_{00}$ et le chien est mort peu après. D'autres expériences sont poursuivies actuellement sur l'animal dépancréaté.

Le haut pouvoir hypoglycémiant de l'amanitine nous apparaît bien démontré par ces nouvelles expériences qui soulignent encore davantage le bien-fondé de la thérapeutique sucrée dans l'intoxication humaine par l'amanite phalloïde.

COMMISSIONS.

Par la majorité des suffrages, MM. **Émile Borel**, **Charles Fabry** pour la Division des Sciences mathématiques; **Marcel Delépine**, **Marc Tiffeneau** pour la division des Sciences physiques; **Maurice de Broglie**, **Gustave Roussy** pour la Section des Académiciens libres, sont élus Membres de la Commission qui, sous la présidence de M. le Président de l'Académie, dressera une liste de candidats à la place d'Académicien libre vacante par le décès de M. *Joseph Bethenod*.

PLIS CACHETÉS.

M. **Paul Lévy** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 16 juin 1943 et enregistré sous le nº 11904.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient la Note suivante, dont l'Académie ordonne la publication :

Une propriété d'invariance projective dans le mouvement brownien.

L'objet de la présente Note est d'indiquer une propriété d'invariance projective dans le mouvement brownien, qui, malgré le grand nombre des travaux parus sur cette question, ne semble pas avoir encore été signalée.

Désignons par $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ les coordonnées du point mobile M, et considérons la loi de probabilité conditionnelle dont dépendent les valeurs de $X(t)$ dans un intervalle (a, b) lorsque $X(a)$ et $X(b)$ sont connus. Elle est déterminée par la formule

$$(1) \qquad X(t) - \mu(t) = X_1(t) = \sigma(t)\xi(t),$$

où $\xi(t)$ est une variable gaussienne réduite, et où

$$(2) \qquad \mu(t) = \frac{(t-a)X(b) + (b-t)X(a)}{b-a}, \qquad \sigma^2(t) = \frac{(t-a)(b-t)}{|b-a|}.$$

Les propriétés stochastiques de $\xi(t)$, considéré comme fonction de t, sont entièrement déterminées par les deux remarques suivantes :

1° Les différentes valeurs de $\xi(t)$ constituent une chaîne simple, c'est-à-dire qu'à tout instant, la valeur actuelle de cette fonction étant supposée connue, le passé et l'avenir sont stochastiquement indépendants; les renseignements que l'on peut avoir sur les événements passés sont donc sans influence sur les probabilités conditionnelles des événements futurs, et réciproquement.

Il en résulte que le processus dont dépend la fonction aléatoire $\xi(t)$ est bien défini si, quels que soient t_0 et t_1 dans l'intervalle (a, b), on connaît la loi à deux variables $\xi(t_0)$ et $\xi(t_1)$.

2° Cette loi est une loi de Gauss à deux variables. Ces variables étant séparément réduites, elle est déterminée par le coefficient de corrélation

$$\rho = \rho(t_0, t_1).$$

Or, en supposant, pour fixer les idées, $a < t_0 < t_1 < b$, la valeur probable conditionnelle de $X_1(t_1)$ quand $X_1(t_0)$ est connu est

$$\frac{b-t_1}{b-t_0} X_1(t_0),$$

de sorte que l'on a

$$(3) \qquad \mathfrak{M}\{X_1(t_0)X_1(t_1)\} = \frac{b-t_1}{b-t_0}\mathfrak{M}\{X_1^2(t_0)\} = \frac{b-t_1}{b-t_0}\sigma^2(t_0),$$

et, compte tenu des valeurs de $\sigma(t_0)$ et $\sigma(t_1)$ qui résultent de la formule (2),

$$(4) \qquad \rho = \frac{\mathfrak{M}\{X_1(t_0)X_1(t_1)\}}{\sigma(t_0)\sigma(t_1)} = \frac{b-t_1}{b-t_0}\frac{\sigma(t_0)}{\sigma(t_1)} = \sqrt{\frac{(t_0-a)(b-t_1)}{(t_1-a)(b-t_0)}}.$$

ρ^2 est donc, au signe près, un des rapports anharmoniques des quatre nombres a, b, t_0, t_1. Par suite :

Théorème. — *Les propriétés stochastiques de la fonction aléatoire réduite* $\xi(t)$, *dans l'intervalle* (a, b), *sont invariantes pour n'importe quelle substitution homographique effectuée à la fois sur* a, b *et* t, *sous la condition que le point à l'infini ne devienne pas intérieur à l'intervalle transformé de* (a, b).

On peut, en particulier, rendre b infini; σ^2 se réduit alors à $t-a$, et, $X(b)/b$ tendant en probabilité vers zéro (on peut même énoncer des résultats plus précis), les formules (1) et (2) se réduisent à la limite à celles relatives au cas où $X(a)$ est seul connu. L'influence de la donnée relative au point b peut, à la limite, être négligée.

On peut aussi appliquer ce théorème au changement de t en $-t$; le passé et l'avenir jouent des rôles symétriques.

Corollaires. — 1° Le théorème précédent peut s'appliquer simultanément à $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. En désignant par M_0 un point mobile qui coïncide avec M aux instants a et b et se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme pendant l'intervalle de temps (a, b), *les propriétés stochastiques de la fonction aléatoire vectorielle* $M_0M/\sigma(t)$ *sont donc, comme celles de* $\xi(t)$, *invariantes pour les substitutions homographiques effectuées à la fois sur* a, b *et* t.

2° *L'ensemble* E *des racines de* $X_1(t)$ *comprises entre* a *et* b *a aussi toutes ses propriétés stochastiques invariantes pour les substitutions homographiques considérées.* Cela est vrai en particulier si $X(a)=X(b)=0$, c'est-à-dire si E est l'ensemble des racines de $X(t)$ comprises entre les racines supposées connues a et b.

CORRESPONDANCE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur un problème de probabilités en chaîne que pose la génétique.* Note de M. **Gustave Malécot**, présentée par M. Émile Borel.

Considérons un tableau carré $(T)=\|a_{ji}\|$ et l'équation en s associée

$$\Delta(s)\equiv|a_{ji}-s\,\delta_{ji}|=0,$$

et supposons que tous les éléments de T soient >0 et que la somme des éléments par lignes soit constante.

Le tableau T_1 déduit de T en en divisant tous les éléments par k peut être regardé comme un tableau de probabilités de passage définissant un problème de probabilités en chaîne positivement régulier. L'équation en s associée à T_1 est $\Delta(ks)=0$, et l'on sait (Fréchet, *Recherches modernes sur le calcul des probabilités*, II), qu'elle admet 1 pour racine simple, et que toutes ses autres racines ont un module inférieur à k.

Considérons alors le problème posé par Fisher [1] et S. Wright [2] : Etudier la probabilité $\theta_{rt}^{(n)}$ pour que, dans une population limitée et constante de N individus, un gène mendélien A, figurant à un moment donné dans r *loci* sur $2N$ (donc avec la fréquence $q=r/2N$), figure n générations plus tard dans t *loci* sur $2N$ (donc avec la fréquence $y=t/2N$). Supposons d'abord que le gène A ne confère pas par rapport à son allélomorphe a d'avantage ni de désavantage à son porteur (pas de *sélections*) et qu'il ne puisse se transformer en d'autres gènes ni apparaître à partir d'eux (pas de *mutations*). Supposons enfin qu'il y ait *panmixie*, c'est-à-dire que les gènes A et a qui à chaque génération occupent les $2N$ *loci* puissent être regardés comme tirés au sort dans un nombre infiniment grand de gamètes A et a produites par la génération précédente dans les proportions mêmes où A et a figurent dans ses *loci*. On a alors

$$(1)\qquad \theta_{rt}^{(1)}=C_{2N}^{t}\left(\frac{r}{2N}\right)^{t}\left(1-\frac{r}{2N}\right)^{2N-t}\qquad \text{avec}\quad \theta_{00}^{(1)}=1\quad\text{et}\quad \theta_{2N,2N}^{(1)}=1\left(\sum_{t=0}^{t=2N}\theta_{rt}^{(1)}=1\right)$$

et les $\theta_{rt}^{(n)}$ sont des probabilités en chaîne simple et constante.

Le tableau T des probabilités de passage est

$$(T)\qquad \left\|\begin{array}{ccccc} 1 & \theta_{10} & \ldots & \theta_{2N-1,0} & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & T_1 & & \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & \theta_{1,2N} & \ldots & \theta_{2N-1,2N} & 1 \end{array}\right\| \qquad T_1 \text{ désignant le tableau } \left\|\begin{array}{ccc} \theta_{11} & \ldots & \theta_{2N-1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \theta_{1,2N-1} & \ldots & \theta_{2N-1,2N-1} \end{array}\right\|$$

(nous écrivons pour simplifier θ au lieu de $\theta^{(1)}$).

Si N *est très grand*, l'intégrale eulérienne

$$\int_0^1 C_{2N}^{t} q^{t}(1-q)^{2N-t}\,dq=\frac{1}{2N+1}$$

montre que la somme par lignes des éléments de T_1 est sensiblement constante et égale à $k=2N/(2N+1)$.

Le déterminant $\Delta(s)$ associé au tableau T est donc $(1-s)^2\Delta_1(s)$, $\Delta_1(s)$ admettant k pour racine simple, et toutes les autres racines s_g ayant un module inférieur à k. Par suite [3]

$$(2)\qquad \theta_{rt}^{(n)}=\pi_{rt}+l_t v_r k^n+\sum_g l_{tg} v_{rg}(s_g)^n.$$

Les constantes π_{rt} sont les limites quand n tend vers ∞ des $\theta_{rt}^{(n)}$, et elles doivent

(1) *Genetical Theory of Natural Selection*, pp. 85 et suiv.

(2) *Genetics*, **16**, 1931, pp. 97 et suiv.

(3) Fréchet, *Public. Fac. Sc. Univ. Masaryk*, **178**, 1933, pp. 6 et suiv.

vérifier les équations

$$\pi_{rt} = \sum_s \pi_{rs} \theta_{st},$$

donc

(3) $$\pi_{rt} = 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad \neq 2N.$$

Tout gène finit donc à la longue par être éteint ($t = 0$) *ou fixé* ($t = 2N$) (alors que dans une population infinie sa fréquence resterait constante). Les l_t et les v_r sont des constantes qui vérifient les équations

(4) $$kl_t = \sum_r l_r \theta_{rt}$$

et

(5) $$kv_r = \sum_t \theta_{rt} v_t.$$

Les équations (4) et (5) admettent une solution bien déterminée à un facteur près

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{2N-1} = l \quad \text{et} \quad l_0 = l_{2N} = -l\frac{2N-1}{2},$$

et, en remplaçant (5) par l'équation de Fredholm homogène,

(6) $$v(q) = (2N+1)\int_0^1 \theta(q, y) v(y)\, dy,$$

on a $v(q) = 6q(1-q)$ et $l = 1/\Sigma_r v_r$, d'où

(7) $$\theta_{rt}^{(n)} \sim \left(\frac{3}{N}\right)\left(\frac{r}{2N}\right)\left(1 - \frac{r}{2N}\right)k^n \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad \neq 2N.$$

Ainsi toutes les fréquences $t/(2N)$ *comprises entre* $1/(2N)$ *et* $(2N-1)/(2N)$ *finissent par avoir la même probabilité infiniment petite* (7). *Cette probabilité est réduite d'une fraction* $1/(2N+1)$ *à chaque génération.*

Si l'on considère l'ensemble des gènes représentés et non fixés, la répartition de leurs fréquences tend donc à s'uniformiser, et leur nombre diminue à la longue d'une proportion $1/(2N+1)$ à chaque génération (Fisher et S. Wright se bornent à vérifier qu'une uniformité initiale se maintient, à la réduction près, mais ne démontrent pas l'uniformisation d'une répartition quelconque).

TOPOLOGIE. — *Sur le contingent dans certains espaces métriques.* Note de M. **Paul Germain**, présentée par M. Élie Cartan.

Nous définirons d'abord les *ensembles unicontingents en* O [1], comme étant les ensembles U admettant O comme point d'accumulation et tels que deux

[1] Cette définition se trouve être identique à celle posée par M. Choquet (*Bull. Soc. Math. France*, **71**, 1944, p. 151).

points quelconques M et P de U aient une distance angulaire tendant vers zéro avec les distances OM et OP $\left(\text{on pose } \widehat{\mathrm{MOP}} = \widehat{mop}\right.$ angle en o du triangle cartésien mop isométrique au triangle $\left.\mathrm{MOP}\right)$. On désigne par $\mathfrak{U}(\mathrm{O})$ la catégorie de tous les ensembles unicontingents en O.

I. Nous supposerons d'abord que les espaces métriques envisagés sont à *écart angulaire régulier autour de* O ([2]), c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de O tel que, si M, N, P désignent trois points de ce voisinage distincts de O, les inégalités $\widehat{\mathrm{MON}} < \eta$, $\widehat{\mathrm{NOP}} < \eta$ entraînent $\widehat{\mathrm{MOP}} < \varepsilon$.

Ceci admis, nous pouvons définir dans $\mathfrak{U}(o)$ une relation d'équivalence (R), deux ensembles U_α et U_β étant équivalents si leur réunion appartient à $\mathfrak{U}(\mathrm{O})$. Nous appellerons *ensemble des contingentes de l'espace au point* O l'ensemble $\mathfrak{U}^*_{(0)}$ des classes d'équivalence de U(O) suivant la relation (R), ou quotient de l'ensemble $\mathfrak{U}(\mathrm{O})$ par la relation (R). Le contingent d'un ensemble E quelconque, au point O, aura pour éléments les contingentes de tous les sous-ensembles de E qui sont unicontingents en O. Nous le noterons $\mathrm{E}^*(\mathrm{O})$. C'est une fonction croissante de E, c'est-à-dire que si $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_2$, on a $\mathrm{E}^*_1(\mathrm{O}) \subset \mathrm{E}^*_2(\mathrm{O})$. De plus, le contingent de la réunion de deux ensembles est identique à la réunion des contingents.

II. Plus particulièrement nous envisagerons les espaces *angulairement métriques en* O; ce sont ceux pour lesquels il existe un voisinage de O dans lequel on ait (a) $\widehat{\mathrm{MOP}} \leqq \widehat{\mathrm{MON}} + \widehat{\mathrm{NOP}}$; M, N, P étant trois points quelconques de ce voisinage, distincts de O. On peut alors définir l'angle de deux ensembles unicontingents et, par passage à la limite, celui de deux contingents en O. Cet angle jouit évidemment d'une propriété de convexité analogue à celle exprimée par l'inégalité (a), c'est-à-dire que (b) $(\mathrm{U}^*_\alpha, \mathrm{U}^*_\beta) \leqq (\mathrm{U}^*_\alpha, \mathrm{U}^*_\gamma) + (\mathrm{U}^*_\gamma, \mathrm{U}^*_\beta)$, en désignant par $(\mathrm{U}^*_\alpha, \mathrm{U}^*_\beta)$ l'angle de ces deux contingentes.

L'ensemble $\mathfrak{U}^*_{(0)}$ *est alors muni d'une structure d'espace métrique* ([3]).

On peut établir les propriétés suivantes :

L'espace $\mathfrak{U}^*_{(0)}$ est un espace complet.

$\mathrm{E}^*(\mathrm{O})$ est un ensemble fermé et l'on a

$$\mathrm{E}^*(\mathrm{O}) = \overline{\mathrm{E}}^*(\mathrm{O}).$$

III. Dans les espaces cartésiens, un ensemble E, admettant O comme point d'accumulation, possède en O un contingent non vide. Dans un espace *angulairement métrique* il peut en être autrement. Le théorème suivant élucide cette question.

([2]) Cette dénomination est volontairement analogue à celle employée par M. Fréchet pour certains espaces (*Les espaces abstraits*, p. 219, Paris, 1928).

([3]) Notre définition se présente alors comme cas particulier de celle de M. C. Pauc (*Comptes rendus*, 203, 1936, p. 153).

Appelant $I(\varepsilon)$ l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe une contingente en O vérifiant l'inégalité $(OM, U^*_\alpha) \leqq \varepsilon$, nous dirons que *l'espace est régulier* en O si $I(\varepsilon)$ comprend un voisinage sphérique de O. Ceci dit on peut énoncer :

Théorème [4]. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le contingent d'un ensemble* E *admettant* O *comme point d'accumulation ne soit jamais vide, est que,* 1° *l'espace soit régulier en* O; 2° *l'espace* $\mathfrak{U}^*_{(0)}$ *soit compact.*

IV. La définition du contingent permet dans certains cas d'étudier divers problèmes de structure d'ensembles. Nous en donnerons l'exemple suivant, qui généralise un théorème bien connu de M. Denjoy [5].

Soit un espace métrique $(\mathcal{E})$ borné, ou réunion dénombrable d'espaces métriques bornés. Supposons : 1° qu'on y ait défini une mesure telle que la mesure d'une sphère de rayon fini et non nul soit elle-même finie et non nulle; 2° que $(\mathcal{E})$ soit *angulairement métrique* en chacun de ses points; 3° qu'en chaque point M, l'espace soit régulier; 4° que $\mathfrak{U}^*_{(M)}$ soit compact.

Dans un tel espace on peut établir :

Théorème. — *Est dénombrable tout ensemble de* $(\mathcal{E})$, *tel qu'en chacun de ses points le contingent soit compris dans une* (*sphère*)* (*de rayon*)* $\theta \leqq \pi/2$ [6].

Ce théorème, contrairement au précédent, ne peut pas s'énoncer avec des définitions trop abstraites du contingent. L'intérêt de la définition que nous avons posée réside dans le fait que la métrique de l'espace est liée d'une façon précise et relativement simple à celle de l'espace donné.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Étude analytique des produits de composition.* Note de M. **Jean Gilly**, présentée par M. Joseph Pérès.

L'expression d'une partie finie d'intégrale au moyen d'une intégrale prise sur un lacet autour d'un point de branchement amène à des extensions notables quand le lacet entoure plusieurs singularités. J'envisage ici la généralisation qui en résulte des produits de composition [1].

Soit une fonction analytique $f(t)$; nous entourerons par une ligne fermée $\gamma_f(0)$, dite le *contour fondamental* de cette fonction, certaines de ses singularités; les autres seront reliées à l'infini par des coupures. Nous dirons

---

[4] Le théorème s'applique également avec des définitions du contingent plus générales que celle du texte; par exemple en adoptant celle de M. Pauc (*loc. cit.*).

[5] A. Denjoy, *Journ. de Math. pures et appliquées*, 7e série, 1, 1915, p. 105.

[6] La marche générale de la démonstration suit, avec quelques précautions, celle donnée par M. Durand pour les ensembles cartésiens dans le livre de M. Bouligand (*Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris).

[1] Cf. *Comptes rendus*, **218**, 1944, pp. 100 et 382. On s'en tiendra dans la présente Note au cas du cycle fermé; il est d'ailleurs facile d'étendre certains résultats indiqués dans cette Note au cas où les fonctions envisagées n'appartiennent pas au groupe du cycle fermé.

que $f(t)$ est d'ordre indéfini α, si, lorsque t décrit dans le sens direct un chemin entourant une fois $\gamma_f(o)$ et revient à sa position initiale, on a $\overline{f(t)} = e^{2\pi i\alpha} f(t)$, $\overline{f(t)}$ étant la valeur finale. Soit de même une fonction $g(t)$, d'ordre indéfini β et de contour fondamental $\gamma_g(o)$; nous désignerons par $-\gamma_g(a)$ le contour obtenu à partir de $\gamma_g(o)$ après symétrie par rapport à l'origine et translation de a. Par définition le produit de composition sera représenté par l'expression

$$\overset{\star\star}{fg}(t) = \left| \int_{\gamma_f(0)}^{-\gamma_g(t)} f(u)\, g(t-u)\, du = \frac{1}{(e^{2\pi i\alpha}-1)(e^{2\pi i\beta}-1)} \int_C f(u)\, g(t-u)\, du, \right.$$

C étant le *double contour* du produit de composition $\overset{\star\star}{fg}(t)$, représenté figure 1, et analogue au contour de Pochhammer pour l'expression de la fonction eulérienne de première espèce. La définition donnée ci-dessus est équivalente

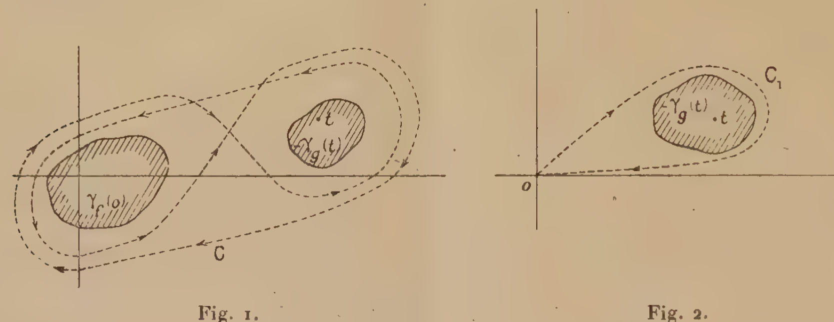


Fig. 1. Fig. 2.

à la définition déjà connue si $\gamma_f(o)$ et $\gamma_g(o)$ se réduisent à l'origine. Si $\gamma_f(o)$ se réduit au point régulier O, on a, C_1 étant représenté figure 2,

$$\overset{\star\star}{fg}(t) = \left| \int_{0}^{-\gamma_g(t)} f(u)\, g(t-u)\, du = \frac{1}{e^{2\pi i\beta}-1} \int_{C_1} f(u)\, g(t-u)\, du. \right.$$

Cette extension conserve les propriétés classiques du produit de composition : distributivité (sous réserve d'une nouvelle généralisation si l'on envisage des fonctions d'ordres indéfinis différents), commutativité, associativité; bien entendu on peut, sans changer le résultat, déformer le contour fondamental et le double contour, à condition de ne pas traverser de singularités, remarque utile pour traiter des développements en série. Si, par exemple, en tout point de C, on a

$$f(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \overset{\star}{1}{}^{\alpha-k}(u); \qquad g(t-u) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_k \overset{\star}{1}{}^{\beta-k}(t-u),$$

on aura

$$\overset{\star\star}{fg}(t) = \sum_r \sum_s c_r d_s \overset{\star}{1}{}^{\alpha+\beta-r-s}.$$

Le contour fondamental $\Gamma(o)$ de $\overset{\star\star}{fg}(t)$, défini par la condition que le double

contour puisse être tracé, contient $\gamma_f(o)$ et $\gamma_g(o)$; l'ordre de $\overset{\star}{f}\overset{\star}{g}(t)$ est $\alpha+\beta$. Lorsque $\alpha+\beta$ est entier, on retrouve la difficulté des ordres singuliers comme dans la théorie usuelle; à l'intérieur de $\Gamma(o)$, $\overset{\star}{f}\overset{\star}{g}(t)$ n'est pas défini. L'emploi du double contour permet, par un passage à la limite, de retrouver l'intégrale de Cauchy

$$\lim_{\alpha\to 0}\overset{\star}{1}{}^{\alpha-k}\overset{\star}{f}(t)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_c\frac{f(u)\,du}{(u-t)^{k+1}}=\frac{d^kf}{dt^k}.$$

h étant une constante quelconque, $\overset{\star}{e}{}^{h\overset{\star}{1}^{-1}}\overset{\star}{f}(t)$ représente $f(t+h)$ avec, comme contour fondamental, $\gamma_f(-h)$, obtenu à partir de $\gamma_f(o)$ par une translation de $-h$.

Soient une fonction $f(t)$, son contour fondamental $\gamma_f(o)$, son associée $\varphi(p)$ et un contour $\Gamma_f(o)$ intérieur à $\gamma_f(o)$, pour lequel $f(t)$ a également un certain ordre indéfini. Nous poserons

$$\overset{\star}{f}_\Gamma\overset{\star}{g}(t)=\left|\int_{\Gamma_f(0)}^{t-\gamma_g(t)}f(u)\,g(t-u)\,du.\right.$$

Cette définition suppose qu'un système de coupures a été tracé dans $\gamma_f(o)$ pour assurer l'unicité de $\overset{\star}{f}_\Gamma\overset{\star}{g}(t)$. $\Gamma_f(o)$ peut se réduire à un point, même un point régulier choisi comme origine des intégrations, ou un point singulier essentiel tel que les produits de composition doivent utiliser comme contour d'intégration une direction singulière de cette singularité [ce sera l'exemple du demi-axe réel positif pour le cas de $\text{erf}\left(1/2\sqrt{t}\right)$, signalé dans la première de mes Notes déjà citées].

On montre dans ces conditions que le développement en série de $\overset{\star}{f}_\Gamma\overset{\star}{g}(t)$ peut être calculé à partir des règles usuelles de composition comme si $f_\Gamma(t)$ avait pour associée $\varphi(p)+E(p)$, $E(p)$ étant une série entière en p, telle que la fonction analytique $p^k E(p).1$ admette les mêmes points singuliers intérieurs à $\gamma_f(o)$ que $f(t)$.

Il est d'ailleurs aisé de déterminer la série

$$E(p)=c_1p+c_2p^2+\ldots+c_Np^N+\ldots,$$

en effet on a

$$\overset{\star}{1}{}^N[\overset{\star}{f}_\Gamma-\overset{\star}{f}(t)]=c_N+c_{N-1}t+\ldots+c_1\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}.$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'extension à certaines séries de quelques propriétés des séries entières.* Note de M. **Yves Martin**, présentée par M. Paul Montel.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'étendre quelques propriétés des séries entières aux séries de la forme

(1) $$f(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}c_n\varphi(z,n),$$

les $\varphi(z, n)$ étant des fonctions entières satisfaisant à la condition

$$m < \left|\frac{\varphi(z, n)}{z^n}\right| < \mathrm{M} \quad \text{pour } r < |z| < \mathrm{R} \quad \text{et } n > \mathrm{N}(r, \mathrm{R}),$$

quels que soient r et R positifs et finis.

Ces séries convergent absolument et uniformément à l'intérieur du cercle $|z| \leqq \rho' < \rho$, avec $\rho^{-1} = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ et divergent pour $|z| > \rho$. En effet, si $|c_n z_0^n| < \mathrm{A}$, pour $|z| = |z_0|(1-\varepsilon)$ et $n > \mathrm{N}\{[|z_0|(1-\varepsilon)/2], 2|z_0|\}$, on a

$$|c_n \varphi(z, n)| < \mathrm{M}\left|c_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}\right| < \mathrm{MA}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n;$$

donc $\Sigma c_n \varphi(z, n)$ converge absolument et uniformément pour $|z| = |z_0|(1-\varepsilon)$ et, par suite, d'après le théorème de Weierstrass, pour $|z| \leqq |z_0|(1-\varepsilon)$. D'autre part, pour $|z| > \rho$ et $n > \mathrm{N}_0$, $|c_n \varphi(z, n)| > m|c_n z^n|$ tend vers l'infini avec n : la série (1) diverge pour $|z| > \rho$.

En posant

$$\varphi(z, n) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p-n}^n z^p = z^n[\alpha_0^n + \eta(z, n)],$$

on montre que les conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par les α_q^n sont

$$\overline{\lim_{q=\infty}} \sqrt[q]{|\alpha_q^n|} = 0 \quad \text{pour tout } n,$$

$$|\alpha_q^n| < \varepsilon_n(r) . r^{-q} \quad \text{pour} \quad q > 0, \text{ avec } \lim_{n=\infty} \varepsilon_n(r) = 0,$$

$$|\alpha_q^n| < \varepsilon'_n(\mathrm{R}) . \mathrm{R}^{-q} \quad \text{pour} \quad q > 0, \text{ avec } \lim_{n=\infty} \varepsilon'_n(\mathrm{R}) = 0,$$

quels que soient r et R positifs finis.

On a alors $\lim \eta(z, n) = 0$ uniformément pour $r < |z| < \mathrm{R}$ et

$$m < \underline{\lim_{n=\infty}} |\alpha_0^n| \leqq \overline{\lim_{n=\infty}} |\alpha_0^n| < \mathrm{M}.$$

Le théorème d'Abel, ainsi que sa réciproque, due à MM. Hardy et Littlewood, s'étendent aux séries (1); on peut donner une démonstration directe du premier de ces théorèmes en montrant préalablement que

$$\left|\frac{\varphi(z, n)}{\varphi(z_0, n)} - \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| < \varepsilon_n |z - z_0| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \quad \text{pour} \quad n > \mathrm{N}_0 \quad \text{avec} \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et en appliquant la transformation d'Abel à la série $\Sigma c_n \varphi(z_0, n) . [\varphi(z, n)/\varphi(z_0, n)]$.

On peut également utiliser les résultats connus relatifs aux séries entières grâce à la propriété suivante :

Si $|c_n z^n| < \mathrm{A}$ et si z tend vers z_0 dans la région R, où

$$0 < \frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \leqq \mathrm{H},$$

alors

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\varphi(z, n) - \frac{z^n}{z_0^n} \varphi(z_0, n)\right] = 0.$$

En effet

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[\varphi(z, n) - \frac{z^n}{z_0^n}\varphi(z_0, n)\right]\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n[\eta(z, n) - \eta(z_0, n)]\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n \varepsilon_n| \, |z - z_0|.$$

Désignant par δ_p le maximum de ε_n pour $n \geq p$, $\delta_p \to 0$ quand $p \to \infty$, et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n \varepsilon_n| \, |z - z_0| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |c_n z^n \varepsilon_n| \, |z - z_0| + AH |z_0| \delta_N \leq \varepsilon$$

pour

$$\delta_N < \frac{\varepsilon}{2AH|z_0|} \qquad \text{puis} \qquad |z - z_0| < \frac{\varepsilon}{2AN\delta_0}.$$

D'après le théorème d'Abel, si $\Sigma c_n \varphi(z_0, n)$ converge et a pour somme L, $\Sigma c_n (z/z_0)^n \varphi(z_0, n)$ tend vers L quand z tend vers z_0 dans la région R, donc aussi $\Sigma c_n \varphi(z, n)$ puisque $|c_n z_0^n|$ est borné. Réciproquement, si $c_n z_0^n = O(1/n)$ et si $\Sigma c_n \varphi(z_0 t, n)$, $0 < t < 1$, a une limite L quand t tend vers 1, $\Sigma c_n t^n \varphi(z_0, n)$ a la même limite, donc $\Sigma c_n \varphi(z_0, n)$ converge et a pour somme L.

Le théorème de M. Féjer s'étend également aux séries (1) : si $\Sigma n |c_n|^2 |z_0|^{2n}$ converge, la série (1) converge en tout point du cercle $|z| = |z_0|$ en lequel la valeur limite radiale de $f(z)$ existe, et converge uniformément sur tout ensemble où cette limite est uniforme.

Ce théorème est une conséquence du théorème relatif aux séries entières si l'on opère comme précédemment; mais il peut être démontré directement en remarquant que

$$|\varphi(z, n) - \varphi(z_0, n)| < (Kn + K') |z_0|^n \, |z - z_0|.$$

En effet

$$\varphi(z, n) - \varphi(z_0, n) - \alpha_0^n (z^n - z_0^n) = \left|\int_{z_0}^{z} [\zeta^n \eta'(\zeta, n) + n\zeta^{n-1}\eta(\zeta, n)] \, d\zeta\right| \leq |z - z_0| \, |z_0|^n (n\varepsilon_n + \varepsilon'_n)$$

et $|\alpha_0^n (z^n - z_0^n)| < K'' n |z - z_0| \, |z_0|^n$ puisque $|\alpha_0^n|$ est borné quand $n \to \infty$.

Enfin, en modifiant légèrement la méthode employée par M. Riesz dans le cas des séries entières, on obtient le résultat suivant :

Si $c_n \rho^n$ tend vers 0, la série $\Sigma c_n \varphi(z, n)$ converge en tout point du cercle de convergence où la fonction est holomorphe et converge uniformément sur tout arc fermé de points où la fonction est régulière.

En résumé, les séries (1) présentent, dans leur comportement à distance finie, les principales propriétés des séries entières.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la théorie des fonctions orthogonales de variable complexe.* Note de M. **Noubar Arpiarian**, présentée par M. Paul Montel.

Dans son Mémoire *Über orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve gehören* (1), M. Szegö définit l'orthogonalité des fonctions de la façon suivante :

(1) *Math. Zeits.*, 9, 1921, p. 218.

C étant une courbe régulière analytique du plan de la variable complexe z, dont ds représente l'élément d'arc, les fonctions $f_m(z)$ forment une suite orthogonale par rapport à ce contour si

$$\int_C f_m(z).\bar{f}_n(z)\,ds \begin{cases} = 0, & \text{si } m \neq n; \\ \neq 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Indépendamment, M. Bochner, dans son Mémoire *Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen* (²), donne la définition suivante : D étant un domaine connexe dont $d\omega$ représente l'élément d'aire, les fonctions $f_m(z)$ forment une suite orthogonale par rapport à ce domaine si

$$\iint_D f_m(z).\bar{f}_n(\bar{z})\,d\omega \begin{cases} = 0, & \text{si } m \neq n; \\ \neq 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Nous avons cherché une relation entre ces deux définitions et avons trouvé qu'elles sont entièrement indépendantes dans le cas général. Il existe en effet des fonctions orthogonales au sens de Bochner par rapport à un domaine D limité par une courbe C, qui ne sont pas orthogonales au sens de Szegö par rapport à la même courbe C et réciproquement, il existe des fonctions orthogonales au sens de Szegö qui ne le sont pas au sens de Bochner.

L'application d'une transformation conforme amène à envisager une orthogonabilité pondérée linéaire ou superficielle, selon qu'on généralise l'orthogonalité à la Szegö ou à la Bochner. :

$$(1) \qquad \frac{1}{M}\int_C f_m(z).\bar{f}_n(\bar{z})\,\varpi(z)\,ds = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ N_n(\text{norme}), & \text{si } m = n; \end{cases}$$

$\varpi(z)$ réel > 0 (poids); M. masse de la courbe C affectée de la densité linéaire $\varpi(z)$.

$$(2) \qquad \frac{1}{\mathfrak{M}}\iint_D f_m(z).\bar{f}_n(\bar{z})\,\Pi(z)\,d\omega = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \mathfrak{N}_n(\text{norme}), & \text{si } m = n; \end{cases}$$

$\Pi(z)$ réel > 0 (poids); $\mathfrak{M}$, masse de la surface D affectée de la densité superficielle $\Pi(z)$.

Nous avons étendu au cas de ces orthogonalités pondérées le théorème fondamental de Szegö, après avoir défini l'écart quadratique moyen pondéré E ou $\mathcal{E}$ de $f(z)$ et de $P_n(z)$ par

$$E = \frac{1}{M}\int_C |f(z) - P_n(z)|^2\varpi(z)\,ds \quad \text{avec} \quad M = \int_C \varpi(z)\,ds,$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\mathfrak{M}}\iint_D |f(z) - P_n(z)|^2\Pi(z)\,d\omega \quad \text{avec} \quad \mathfrak{M} = \iint_D \Pi(z)\,d\omega.$$

Nous avons obtenu le résultat suivant :

(²) *Math. Zeits.*, 14, 1922, p. 180.

THÉORÈME. — *Étant donné un domaine simplement connexe* D *limité par une courbe rectifiable* C *et une fonction réelle positive quelconque* $\varpi(z)$, *il existe toujours, à un facteur constant près, une suite unique de polynomes orthogonaux de poids* ϖ *par rapport à la courbe* C *et une suite unique de polynomes orthogonaux de poids* ϖ *par rapport au domaine* D [3].

Ces polynomes ont pour expression

$$Q_n(z) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} s_{00} & s_{10} & \dots & s_{n0} \\ s_{01} & s_{11} & \dots & s_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{0n-1} & s_{1n-1} & \dots & s_{n,n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \dots,$$

où

$$D_{n-1} = \| s_{ij} \|_0^{n-1}; \quad s_{ij} = \frac{1}{M} \int_C z^i \bar{z}^j \varpi \, ds \quad \text{ou} \quad s_{ij} = \frac{1}{\mathfrak{M}} \iint_D z^i \bar{z}^j \varpi \, d\omega,$$

selon le cas.

La fonction $f(z)$ *étant holomorphe à l'intérieur du contour fermé rectifiable* C *et continue sur le contour, la série associée*

$$c_0 Q_0(z) + c_1 Q_1(z) + \dots + c_n Q_n(z) + \dots,$$

où

$$c_k = \frac{1}{M} \int_C f(z) \bar{Q}_k(\bar{z}) \varpi \, ds \quad \text{ou} \quad c_k = \frac{1}{\mathfrak{M}} \iint_D f(z) \bar{Q}_k(\bar{z}) \varpi \, d\omega$$

converge uniformément vers $f(z)$ *dans tout domaine fermé intérieur à* C *pourvu que* $\varpi(z) \geqq K > 0$.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Conditions nécessaires et suffisantes pour que deux grandeurs simultanément mesurables soient stochastiquement indépendantes, pour un état donné du système mécanique.* Note [1] de M. **Edmond Arnous**.

La possibilité d'exprimer simplement, en Mécanique ondulatoire, la fonction caractéristique du spectre de deux grandeurs simultanément observables [2] permet d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces grandeurs soient stochastiquement indépendantes (indépendantes au sens du calcul des probabilités).

Désignons par A et B deux grandeurs simultanément observables. Le

(3) Nous avons constaté par la suite qu'une généralisation analogue a été faite par M. Walsh par une méthode et dans des termes différents (*Trans. Amer. Soc.*, 32, 1930, p. 794).

(1) Séance du 16 août 1944.

(2) Voir *Comptes rendus*, 219, 1944, p. 357.

résultat d'une mesure de A sera représenté sur un axe par un point d'abscisse a, et l'ensemble des résultats possibles et des probabilités correspondantes par une masse unité, répartie le long de l'axe. $F_A(a)$ désignera la fonction de répartition de cette masse, $f_a(a)$ sa densité de répartition [3] et $K_A(u)$ sa fonction caractéristique. $F_B(b)$, $f_B(b)$ et $K_B(v)$ désigneront les éléments analogues pour B. Le résultat de la mesure *simultanée* de A et de B sera représenté, dans un plan, par un point de coordonnées (a, b), et l'ensemble des résultats possibles et des probabilités correspondantes, par une masse unité répandue sur ce plan. $F(a, b)$ désignera la fonction de répartition de cette masse, $f(a, b)$ sa densité de répartition et $K(u, v)$ sa fonction caractéristique.

On dit que A et B sont stochastiquement indépendantes, si la loi de probabilité de A, liée par B, est identique à sa loi non liée, ou encore, c'est une autre façon de dire la même chose, si le théorème des probabilités composées peut s'écrire

$$(1) \quad F(a, b) = F_A(a).F_B(b) \quad \text{ou} \quad (1') \quad f(a, b) = f_A(a).f_B(b).$$

L'exemple suivant mettra en évidence que l'indépendance stochastique et l'indépendance des opérateurs A et B [4] sont deux choses très différentes et permettra, dans une certaine mesure, de dégager le sens physique de l'indépendance stochastique. Soit un système de deux corpuscules M_1 et M_2 assujettis à se déplacer sur une droite. Leurs abscisses x_1 et x_2 sont des opérateurs indépendants. Le spectre du couple (x_1, x_2) est défini par sa densité $f(x_1, x_2) = |\Psi(x_1, x_2)|^2$. Il y aura indépendance stochastique, d'après (1′), si la fonction d'onde Ψ est de la forme $\psi(x_1).\psi(x_2)e^{i\varphi[x_1, x_2]}$. C'est ce qui arrive s'il n'y a pas interaction. Mais, si les corpuscules se repoussent, Ψ n'a plus cette forme; la probabilité de trouver M_1 et M_2 dans le voisinage l'un de l'autre diminue; l'indépendance stochastique est détruite. L'indépendance stochastique est donc une *indépendance dynamique*. Elle dépend essentiellement de Ψ. Comment en dépend-elle? C'est ce que nous allons préciser, en faisant intervenir les fonctions caractéristiques. (1) peut en effet s'écrire (ceci est bien connu)

$$(2) \qquad K(u, v) = K_A(u).K_B(v) = K(u, 0).K(0, v).$$

Remplaçons les K par leurs valeurs [2]

$$(3) \qquad (e^{-iuA}\Psi, e^{ivB}\Psi) = (e^{-iuA}\Psi, \Psi)(\Psi, e^{ivB}\Psi).$$

Voici un exemple [5], celui de l'oscillateur isotrope. Prenons le potentiel

---

[3] Si toutefois il s'agit d'une répartition à densité.

[4] A et B sont des opérateurs indépendants, s'ils s'expriment à l'aide de variables différentes.

[5] On trouvera un autre exemple dans les *Comptes rendus*, **219**, 1944, p. 358.

$V = (k/2)(x^2 + y^2 + z^2)$ et la fonction d'onde initiale

$$\Psi_0 = \left[\frac{4\pi\nu m}{h}\right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{1}{2\lambda^2}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]} \qquad \text{où } \lambda^2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{Km}}, \; \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Désignons par P_x, P_y, P_z, les composantes de la quantité de mouvement et par M_x, M_y, M_z, celles du moment cinétique. La séparation des variables dans Ψ permet d'affirmer, d'après (3), l'indépendance stochastique de x et P_z, de P_x et P_y, de M_z et Z, de M_z et P_z. Par contre M_z et l'énergie H ne sont pas stochastiquement indépendantes, $K(u, v)$ n'est pas de la forme (2), ainsi que le montre le calcul suivant

$$K(u, v) = \int (e^{-iuM_z}\Psi_0)^*(e^{ivH}\Psi_0)\, dq$$

$$= \iiint \Psi_0^*\left(x\cos\frac{hu}{2\pi} - y\sin\frac{hu}{2\pi},\; x\sin\frac{hu}{2\pi} + y\cos\frac{hu}{2\pi},\; z\right)\Psi\left(t = \frac{hv}{2\pi}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= e^{\left(\alpha^2\cos\frac{hu}{2\pi} + \frac{Z_0^2}{2\lambda^2}\right)e^{h\nu iv} + \frac{3}{2}h\nu iv - \beta^2} \qquad \text{où } \alpha^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2\lambda^2},\; \beta^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2\lambda^2}.$$

Nous allons maintenant traduire (3) en langage géométrique. (3) est équivalent à l'ensemble des conditions

$$(A^m\Psi, B^n\Psi) = (A^m\Psi, \Psi)(\Psi, B^n\Psi) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

On le voit en développant, dans (3), les exponentielles et en identifiant les deux membres. Posons

$$A^m\Psi = P_{A^m}\Psi + Q_{A^m} \quad \text{et} \quad B^n\Psi = P_{B^n}\Psi + Q_{B^n};$$

ceci revient à projeter $A^m\Psi$ et $B^n\Psi$ sur la multiplicité orthogonale à Ψ dans l'espace de Hilbert. La condition (3) s'écrit alors $(Q_{A^m}, Q_{B^n}) = 0$.

D'où les *conditions nécessaires et suffisantes d'indépendance stochastique* :

ou bien Ψ *est fonction propre de* A, $(Q_A = 0)$;

ou bien Ψ *est fonction propre de* B, $(Q_B = 0)$;

ou bien la projection, parallèle à Ψ, *de la multiplicité définie par* $A\Psi$, $A^2\Psi$, ... *est orthogonale à la projection, parallèle à* Ψ *de la multiplicité définie par* $B\Psi$, $B^2\Psi$, ...

GÉODÉSIE. — *Erreur de réfraction dans le cas du nivellement de précision.* Note [1] de M. **Jean Vignal**, présentée par M. Georges Perrier.

L'erreur de réfraction est une des plus graves parmi celles affectant le nivellement de précision. Elle dépend de la manière dont la température T varie avec l'altitude H, dans la couche atmosphérique basse, haute d'à peine

(1) Séance du 16 octobre 1944.

2 mètres, où l'on opère. Les théories qui en ont été présentées font intervenir diverses lois de variation de T avec H, toujours définies par *plusieurs coefficients*. Elles aboutissent à des formules *compliquées* en fonction de ces coefficients.

Or l'erreur de réfraction ne dépend en fait que *d'un coefficient physique unique*, le gradient vertical de la température dT/dH dans la couche horizontale infiniment mince traversée par la visée horizontale assez courte, excédant rarement 100 mètres, du nivellement de précision. Et elle peut s'exprimer *très simplement* en fonction de ce coefficient.

Nous nous bornerons à étudier le cas, seul accessible au calcul, où l'air est en équilibre. Alors les surfaces d'égale pression p, d'égale densité ρ, d'égale température T, d'égal indice de réfraction n sont toutes des sphères concentriques à la Terre.

L'erreur de réfraction ε, sur une visée horizontale de longueur l, s'exprime immédiatement en fonction du *rayon de courbure* A de la visée par la formule suivante, abstraction faite de l'erreur de courbure terrestre,

$$\boxed{\varepsilon = \frac{l^2}{2A}.}$$

Il est facile de voir que le rayon de courbure A ne dépend en fait que du gradient dT/dH.

Soit un rayon lumineux, d'inclinaison d'abord regardée comme quelconque, traversant une couche d'air d'indice n, d'épaisseur dH, sur une longueur dl, en faisant l'angle d'incidence i avec la verticale, c'est-à-dire avec le rayon terrestre, du côté inférieur de la couche. Appelons r l'angle du rayon lumineux avec le rayon terrestre, du côté supérieur de la couche, et $d\omega$ l'angle des deux rayons terrestres précédents. On a

$$\frac{1}{A} = \frac{d\omega + i + di - i}{dl} = \frac{di + d\omega}{dl} = \cos i \, \frac{di + d\omega}{dH}.$$

Or, d'après la loi de la réfraction de Descartes,

$$(n + dn)\sin(i + di) = n \sin r = n \sin(i - d\omega).$$

On déduit de là l'expression suivante du rayon de courbure A, en supposant la visée horizontale ($i = \pi/2$), et en remarquant que l'indice n est très voisin de l'unité,

$$\frac{1}{A} = -\frac{dn}{dH}.$$

On a, d'autre part, K et K′ étant deux constantes, et g étant l'accélération de la pesanteur,

$$n - 1 = K\rho, \qquad \rho = K' \frac{p}{T}, \qquad \frac{dp}{dH} = -\rho g.$$

On en tire sans peine la relation

$$\boxed{\frac{1}{A} = \frac{1}{A_0}\left[1 + \frac{1}{\theta}\frac{dT}{dH}\right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{A_0 = \frac{p}{(n-1)\rho g}} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = \frac{\rho g T}{p}.}$$

Donnons à p, ρ, T, g leurs valeurs normales, dont les valeurs réelles ne s'écartent jamais énormément. Cette relation s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{A} = \frac{1}{27000\,\text{km}}\left[1 + \frac{1}{3,5}\frac{dT}{dH}\ \text{degrés par 100 mètres}\right].}$$

Les valeurs du gradient dT/dH mesurées au voisinage du sol par différents expérimentateurs sont fort variables. Voici quelques valeurs caractéristiques :

1° $dT/dH = -\theta = -3,5$ degrés par 100 mètres. Alors la courbure $1/A$ de la visée est nulle, ainsi que l'erreur de réfraction ε. Le gradient dT/dH ne peut être inférieur à cette valeur négative; sinon on aurait $d\rho/dH < 0$; l'air cesserait d'être en équilibre; les couches basses, chauffées par le sol, seraient plus légères que les couches élevées; il se produirait le phénomène des *ondulations*.

2° $dT/dH = -[1-(1/\gamma)]\theta$, γ étant le rapport des chaleurs spécifiques de l'air à pression constante et à volume constant, égal à 1,41; soit $dT/dH = -1$ degré par 100 mètres. Alors $A = \gamma A_0 = 38000$ km; à 100 mètres, l'erreur de réfraction est $\varepsilon = 0^{mm},1$.

3° $dT/dH = \theta[(A_0/R)-1]$, R étant le rayon de la Terre; soit $dT/dH = 11$ degrés par 100 mètres. Alors $A = R$, l'erreur de réfraction ε compense exactement l'erreur de courbure terrestre; à 100 mètres, elle est environ $\varepsilon = 0^{mm},8$.

Le gradient dT/dH peut s'élever, au voisinage du sol, à 50 degrés par 100 mètres et au delà. Alors le rayon de courbure de la visée A s'abaisse à 3000 ou 2000 km, et l'erreur de réfraction à 100 mètres peut dépasser 2 ou 3 mm.

MAGNÉTISME. — *Le polymorphisme particulier du composé* MnAs *aux températures de disparition et de réapparition de l'aimantation spontanée.* Note de MM. **Charles Guillaud** et **Jean Wyart**, présentée par M. Aimé Cotton.

Le composé défini MnAs est ferromagnétique; l'aimantation spontanée disparaît à 45°C. au chauffage, et ne réapparaît qu'à 34°C. seulement au refroidissement. Cette irréversibilité laisse supposer, non un vrai point de Curie, mais un point de transformation. C'est pour préciser la nature de cette transformation que nous avons entrepris entre autres l'étude à différentes températures du réseau cristallin à l'aide des rayons X, et l'étude dilatométrique de la substance.

Celle-ci a été préparée, sous pression d'argon, à partir de manganèse distillé (99,98 %) et d'arsenic sublimé dans le vide (99,87 %).

La substance, réduite en poudre, est enfermée dans un tube de 1^{mm} de diamètre en verre de Lindeman, disposé suivant l'axe vertical du spectrographe à rayons X. Le tube est chauffé par un courant d'air qui traverse un four électrique placé au-dessus de l'échantillon. Un couple thermoélectrique repère la température. Les diagrammes ont été réalisés à l'aide du rayonnement monochromatique $K\alpha$ du fer.

A 20° le diagramme révèle une symétrie hexagonale, comme l'a établi Oftedal (¹) et non orthorhombique, ainsi que l'affirme K. E. Fylking (²). La maille élémentaire a pour paramètres $a = 3,710$ Å, $c = 5,691$ Å (précision 1/500).

Tant que la température n'atteint pas 45°C., les diagrammes demeurent sensiblement les mêmes. A 45°C. un changement dans la position des raies correspondant aux faibles intervalles réticulaires indique une transformation polymorphe discontinue, très particulière, car elle se traduit par un déplacement brusque et très petit des atomes, sans que les caractères essentiels de leur arrangement, en particulier leur groupe de symétrie, soient modifiés.

Cette transformation est une contraction perpendiculaire à l'axe sénaire, tandis que la période suivant cet axe sénaire demeure inchangée.

Les paramètres, à 45°C., deviennent

$$a = 3,659 \text{ Å}; \qquad c = 5,691 \text{ Å}.$$

Ainsi, quand la température croît, le rapport c/a passe brusquement de 1,534 à 1,555 à la température de 45°C. En continuant à chauffer au-dessus de cette température, le réseau se dilate.

Il était bon de contrôler ces résultats par la dilatométrie de la substance. Celle-ci, se présentant en masse non compacte, ne se prête pas aux études dilatométriques utilisant le déplacement d'une tige s'appuyant sur l'échantillon; il a fallu construire un dilatomètre à liquide permettant d'opérer sur la poudre.

Ce dilatomètre est constitué essentiellement par un réservoir cylindrique de 13^{cm^3} environ, prolongé par un tube capillaire de $0^{mm},110$ de diamètre et de 50^{cm} de longueur. Ce réservoir plonge dans un bain liquide dont l'uniformité de la température est assurée à 1/50 de degré près, même aux plus basses températures atteintes. Le niveau dans le capillaire est repéré par un cathétomètre permettant d'apprécier des déplacements de 1/100 de millimètre.

On manifeste ainsi à 45°C. une contraction brusque du volume dont la valeur est de l'ordre de 2,5 %. Ce nombre est voisin de celui que l'on calcule à partir des constantes cristallines. Au-dessus de 45°C. le corps se dilate. Cet appareil met en évidence l'irréversibilité du phénomène. Au refroidissement c'est à 34°C. que MnAs se dilate d'une façon anormale, en même temps que réapparaît l'aimantation spontanée.

(¹) *Zeits. phys. Chem.*, **128**, 1927, p. 135; **132**, 1927, p. 208.

(²) *Ark. Kem., Min., Geol.*, **11** *b*, XLVIII, 1934, p. 1.

Quelle interprétation peut-on donner de ce polymorphisme singulier? L'arrangement des atomes est du type NiAs; chaque atome de manganèse a comme voisins les plus immédiats 6 atomes d'arsenic à la distance de 2,571 Å et 2 atomes de manganèse à la distance de 2,845 Å. Quand la température est supérieure à 45°C., les 6 As qui forment autour d'un atome de Mn un octaèdre se sont rapprochés à la distance de 2,547 Å de celui-ci, alors que les 2 Mn sont demeurés à la même distance (2,845 Å). Les électrons périphériques des atomes Mn et As, responsables de la conductibilité électrique comme de la liaison chimique Mn — As, ont une nouvelle répartition et sont plus solidement fixés aux noyaux, puisque la distance Mn — As est plus courte; sans doute remplissent-ils plus complètement la couche 3*d* des atomes de Mn, qui perdent ainsi leur moment magnétique.

RAYONS X. — *Sur la structure de certains caoutchoucs de synthèse : cas du polysulfure d'éthylène (thiogomme).* Note de MM. **Jean-Jacques Trillat** et **Robert Tertian**, présentée par M. Maurice de Broglie.

L'étude aux rayons X des différents caoutchoucs de synthèse a donné lieu à un certain nombre de travaux d'où il résulte que ces produits ont en général un comportement assez différent de celui du caoutchouc naturel; c'est ainsi que les phénomènes de cristallisation provoqués par leur traction sont soit inexistants (Buna S et N), soit beaucoup moins nets que pour le caoutchouc naturel (néoprène, vistanex etc.), ce qui laisse le champ ouvert aux hypothèses sur l'origine de l'élasticité [(L. B. Sebrell et R. P. Binsmore (1)].

On sait que le produit de condensation du dichloréthane avec le polysulfure de sodium donne lieu à un tétrasulfure d'éthylène qui se polymérise en chaîne linéaire $(CH^2—CH^2—S^4)^n$ (J. C. Patrick) (2). Mélangé à des charges appropriées et vulcanisé, il constitue un succédané du caoutchouc, qu'il peut remplacer dans un certain nombre de ses applications (thiogomme ou thiokol).

J. R. Katz (3) et C. S. Fuller (4) ont montré que le thiogomme étiré était susceptible de donner des interférences cristallines; un modèle de cellule élémentaire a été proposé par ces auteurs. Nous avons, pour notre part, examiné le thiogomme pur et industriel, soit au repos, soit à l'état étiré, en utilisant le rayonnement Kα du cuivre (λ 1,54 Å). Les résultats obtenus peuvent se résumer comme suit :

a. Thiogomme pur. — Au repos, la structure est amorphe et est caractérisée par un halo correspondant à une distance intermoléculaire moyenne de 10,4 Å.

A l'état étiré, et dès que l'allongement atteint 50 %, il apparaît un très beau

(1) *India Rubber World*, **103**, 1941, p. 37.
(2) *Trans. Faraday Soc.*, **32**, 1936, p. 347.
(3) *Trans. Faraday Soc.*, **32**, 1936, p. 77.
(4) *Chem. Rev.*, **26**, 1940, p. 160.

diagramme de fibres, plus net et plus intense que celui présenté par le caoutchouc naturel. Ce diagramme, contrairement au cas du caoutchouc, appparaît pour de très faibles allongements et subsiste encore après cessation de la traction; celle-ci semble provoquer une déformation plastique qui se traduit par une déformation permanente, et la texture orientée reste stable.

L'étude des clichés obtenus avec une caméra cylindrique permet de calculer avec certitude la période d'identité suivant l'axe de fibre; cette période a pour valeur $c = 4,27$ Å, en bon accord avec celle de Katz et Fuller (4,32 Å). Elle correspond à la longueur, suivant l'axe de fibre, du groupe fondamental $[-(CH^2)^2-S^4-]$. La maille élémentaire proposée est orthorhombique, avec les dimensions suivantes :

$$a = 8,57\ \text{Å}, \quad b = 5,0\ \text{Å}, \quad c = 4,27\ \text{Å};$$

le volume, égal à 183 Å^3, comporte une molécule par maille. La petitesse de la période d'identité exclut la possibilité de grouper les atomes de C et de S suivant une ligne droite $CH^2-CH^2-S-S-S-S-CH^2-CH^2\ldots$; on est amené à la disposition

```
...--CH²—CH²—S—S—-CH²—CH²—S—S—-CH²—...
             ||  ||            ||  ||
             S   S             S   S
   |<----------->|
          c
```

ou

```
                  S                 S
                  ||                ||
...--CH²—CH²—S—S—-CH²—CH²—S—S—-CH²—...,
             ||            ||
             S             S
   |<----------->|
          c
```

conforme à celle proposée par J. C. Patrick (²) pour des raisons d'ordre chimique (labilité de deux atomes de soufre).

Les phénomènes de cristallisation provoqués par la traction et présentés par le thiogomme ressemblent donc par bien des points à ceux présentés par le caoutchouc naturel, mais s'en différencient par certains autres, tels que la stabilité de la structure d'orientation due à la grande plasticité du thiogomme. Il est probable que le mécanisme consiste dans le déroulement par la traction et la disposition ordonnée des longues chaînes préalablement repliées et enroulées sur elles-mêmes au repos; cet enroulement est rendu possible par la présence des doubles liaisons entre les atomes de S et constitue un argument de plus en faveur de celles-ci et de l'existence d'atomes de S tétravalents. A notre connaissance, aucun caoutchouc de synthèse ne donne lieu à des phénomènes de cristallisation provoquée aussi nets que ceux-ci, et l'étude du thiogomme est donc intéressante à ce point de vue.

b. Thiogomme industriel. — Ce produit comporte, outre le polymère orga-

nique, diverses charges telles qu'accélérateurs, oxyde de zinc, noir de carbone, destinés à lui donner les propriétés mécaniques recherchées.

Le thiogomme industriel présente une particularité intéressante à l'état non vulcanisé : le laminage résultant de sa fabrication lui impose une structure orientée caractéristique, tout à fait différente de celle obtenue par étirement.

Ces études seront prochainement complétées à l'aide de diagrammes pris en rayonnement rigoureusement monochromatique.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Synthèse progressive du mésodiphénylazanthracène-α.* Note de M. **André Étienne**, présentée par M. Marcel Delépine.

La synthèse du mésodiphénylazanthracène-α que j'ai décrite antérieurement ([1]) consiste à réduire le diquinol formé par réaction du bromure de phénylmagnésium sur l'azanthraquinone-α. Elle n'est pas sans laisser quelque incertitude sur la constitution du composé. D'une part en effet la phénylation de l'azanthraquinone-α, contrairement à ce qui se passe avec les anthraquinones, s'est révélée comme assez complexe, puisqu'elle aboutit, en plus du quinol, à deux autres corps de nature différente et encore inconnue. D'autre part une étude en cours démontre que le noyau azoté est attaquable par le réactif de Grignard. J'ai donc cherché une méthode de synthèse évitant l'action du magnésien sur un intermédiaire azoté.

Il suffisait, pour y parvenir, de ne créer l'accolement *pyrido* qu'en dernier lieu sur une molécule ayant déjà les deux phényles en place, en appliquant la réaction de Skraup au diphényl-1.4naphtalène.

C^6H^5, C^6H^5, N (I) — C^6H^5, NH^2, C^6H^5 (II) — C^6H^5, O, C^6H^5 (III)

C^6H^5, R, C^6H^5

R = $-CO^2H$ (IV), $-COCl$ (V), $-CONH^2$ (VI), $-CO^2C^2H^5$ (VII), $-CONHNH^2$ (VIII), $-CO{-}N{-}N{=}N$ (IX), $-NHCO^2C^2H^5$ (X)

La difficulté principale du travail a consisté à préparer l'amine diphénylnaphtalénique (II), qui n'avait pas encore été signalée. La matière première

([1]) *Comptes rendus*, **217**, 1943, p. 694.

est l'acide diphényl-1.4naphtalènecarboxylique-2 (IV), de Weiss et Abeles ([2]). Une tentative de dégradation d'Hofmann, par l'hypobromite, de l'amide (VI), F 177°, obtenue par le chlorure d'acide (V), F 143°, n'a pas donné de résultats satisfaisants. Il n'en est pas de même en appliquant la méthode de Curtius, qui nous a permis d'aboutir à l'amine avec des rendements voisins de 80 %. On part de l'éther-sel (VII), F 92°, et l'on obtient les corps intermédiaires suivants : hydrazide (VIII), F 179°; azide (IX), F 95-97° (décomposition); l'uréthane (X) existe sous deux formes cristallines : l'une en aiguilles, F 178°, l'autre en prismes, F 207°, la forme en aiguilles se transformant en forme prismatique par chauffage lent; l'hydrolyse de l'uréthane donne l'amine (II), F 148°. La transformation en diphénylazanthracène se fait dans l'acide sulfurique en présence de glycérine et d'acide arsénique; l'addition de dioxane, qui homogénise la masse, élève le rendement à 40-50 %. Le diphényl-azanthracène préparé, F 289°, est bien identique à celui qui a été obtenu à partir du diquinol (p. f. seuls et en mélange identiques, mêmes spectres d'absorption, production de photooxyde).

Cette nouvelle synthèse constituerait une méthode avantageuse de préparation du mésodiphénylazanthracène-α, s'il n'y avait la difficulté de se procurer l'acide initial. Ce corps provient en effet de l'addition diénique d'acroléine au diphénylisobenzofuran (III), matière première assez laborieuse à préparer à partir de l'anhydride phtalique. Certaines modifications sont à l'étude.

L'ensemble des nombreuses transformations qui aboutissent au mésodiphénylazanthracène-α revient à construire la molécule noyau par noyau. Partant d'un corps benzénique, l'anhydride phtalique, on lui accole successivement un noyau benzénique, puis sur le corps naphtalénique ainsi formé, un noyau pyridinique : c'est un incontestable recoupement pour la constitution précédemment admise.

MICROBIOLOGIE. — *Le virus syphilitique ganglionnaire est-il ultrafiltrable ?* Note ([1]) de M. **Constantin Levaditi** et Mme **Hélène Noury**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Nous avons étudié ([2]) la manière dont se comporte le *Treponema pallidum* à l'égard de l'ultrafiltration à travers des membranes en collodion à pores mesurables [technique d'Elford ([3])]. Nos conclusions étaient que le virus syphilitique, sous la forme spirochétienne, traversait des membranes à

([2]) *Monatsh. für Chem.*, **61**, 1932, p. 162.

([1]) Séance du 2 octobre 1944.

([2]) C. Levaditi et A. Vaisman, *Presse médicale*, 51, III, 1943, p. 19.

([3]) *Journ. Pathol. Bactér.*, **34**, 1934, p. 505.

porosités larges, allant de 1140 à $2710^{m\mu}$ et qu'il était arrêté par des membranes de 560 et de 320 $^{m\mu}$, lesquelles laissent passer la plupart des ultravirus connus.

Il s'agissait, dans ces expériences, du virus syphilomateux, tel qu'il existe dans les chancres syphilitiques du Lapin. Or il nous a semblé intéressant de préciser l'ultrafiltrabilité du virus spécifique que renferment, chez le Lapin, les ganglions lymphatiques satellites du syphilôme (g. poplités). On sait que, contrairement aux chancres, ces ganglions ne contiennent que de très rares tréponèmes et que, fort souvent, ils apparaissent dépourvus de formes spirochétiennes. Cette constatation a d'ailleurs suggéré l'hypothèse que le virus serait présent dans les glandes lymphatiques sous une forme inframicroscopique, différente de la spirallée [4]. Voici les résultats de nos essais :

Expérience. — Les ganglions poplités de douze lapins, anciennement porteurs de syphilômes scrotaux (souche Gand), sont prélevés et émulsionnés finement dans le liquide de Tyrode (à 1 p. 10); l'émulsion est clarifiée par centrifugation (2000 t. m; 500^{g} à la périphérie du champ centrifuge). Le liquide surnageant est ultrafiltré à travers des membranes de 2690, 1140, 560, 320 et $190^{m\mu}$. Les ultrafiltrats et l'émulsion témoin sont inoculés à des lapins, à la dose de 1^{cm^3} dans chaque testicule et sous le scrotum, et aussi à des souris (0^{cm^3},5 sous la peau du dos; examen de la présence et de la dispersion des tréponèmes dans les organes de ces souris).

Filtrat à travers des membranes de :	Lapins. — Résultat.	Temps d'incubation.	Souris. Nombre.	Dispers. +.	Dispers. o.
Témoin (non ultra-filtré)	1. Chancre scrot.	60 jours	3	2	1
	2. » »	40 »	–	–	–
$2690^{m\mu}$	3. o	–	–	–	–
	4. Chancre scrot.	60 jours	4	–	4
$1140^{m\mu}$	5. o	–	3	–	3
	6. o	–	–	–	–
$560^{m\mu}$	7. o	–	5	–	5
	8. o	–	–	–	–
$320^{m\mu}$	9. o	–	4	–	4
$190^{m\mu}$	10. o	–	–	–	5
	11. o	–	5	–	–

En outre, des passages de ganglions des lapins inoculés avec les ultrafiltrats des membranes comprises entre 190 et $1140^{m\mu}$ ont été effectués; ils ont tous fourni des résultats négatifs.

Conclusion. — Le virus syphilitique ganglionnaire traverse la membrane de $2690^{m\mu}$, mais est arrêté par les membranes dont la porosité varie de 190 à $1140^{m\mu}$. Il résulte de la comparaison avec nos résultats concernant le virus

---

(4) C. Levaditi, Vaisman et Schoen, *C. R. Soc. Biol.*, 110, 1932, p. 370; *Ann. Inst. Pasteur*, 50, 1933, p. 222.

syphilomateux que la taille du virus ganglionnaire est supérieure à celle de ce dernier virus. En réalité cette différence n'est qu'apparente. En effet le degré de la virulence de la suspension du virus syphilomateux est, d'après nos constatations [5], supérieur (10^{-3}) à celui du virus ganglionnaire (10^{-1}) (mesuration par dilutions progressives). Or on sait que l'ultrafiltrabilité est en fonction de l'activité pathogène.

En résumé, il y a lieu de conclure *qu'aucun principe véritablement ultrafiltrable et virulent n'existe dans les extraits de ganglions lymphatiques satellites du chancre*. Le pouvoir chancrigène est arrêté par des membranes qui laissent passer la plupart des ultravirus connus. Ces conclusions sont conformes à celles qui découlent de nos essais concernant l'ultrafiltrabilité du virus siphilomateux.

A 15h45m l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16h15m.

L. B.

---

(5) C. et J.-C. Levaditi, *C. R. Soc. Biol.*, 135, 1943, p. 316.

ERRATA.

—

(Séance du 10 juillet 1944.)

Note de Mlle *Cécile Delay*, Nouvel essai de classification des différents types de structure nucléaire :

Page 77, ligne 23, *au lieu de* pauvres en chromocentres, *lire* pauvres en chromatine.